55. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklasse 5
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

550511

In dieser Aufgabe geht es darum, Zahlenfolgen nach folgendem Verfahren zu erzeugen:

(0) Wähle eine Startzahl und notiere sie.
(1) Addiere 5 zur notierten Zahl.
(2) Verdoppele das Ergebnis aus Schritt (1).
(3) Ziehe nun vom Ergebnis aus Schritt (2) 10 ab.
(4) Notiere die nun erhaltene Zahl. Gehe wieder zu Schritt (1).

a) Wähle als Startzahlen nacheinander die Zahlen 2, 6 und 7.
Durchlaufe die Anweisungen jeweils fünf Mal, so dass du jeweils sechs Zahlen notiert hast. Deine notierten Zahlen bilden jeweils den Beginn einer Zahlenfolge.

b) Wähle dir zwei weitere Startzahlen und wiederhole jeweils die Rechnungen. Was kannst du beobachten, wenn du jeweils die Zahlen deiner Zahlenfolgen betrachtest? Begründe.

c) Gibt es eine Anfangszahl, bei der du am Ende des vierten Durchlaufs (als fünfte Zahl der Zahlenfolge) die Zahl 104 erhältst? Begründe.

550512

In dieser Aufgabe sind Schnittpunkte immer Punkte, in denen sich Figuren schneiden und nicht nur berühren.

Friederike experimentiert mit einem Dreieck und drei Geraden. Jedes der vier geometrischen Objekte muss mindestens ein anderes schneiden.

Welche Anzahlen von Schnittpunkten kann sie erhalten?

Fertige für jede Anzahl eine neue Zeichnung mit Lineal und Bleistift an und nummeriere in jeder Zeichnung die Schnittpunkte neu.

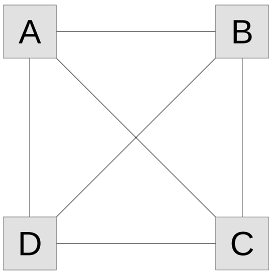
Auf der nächsten Seite geht es weiter!

550513

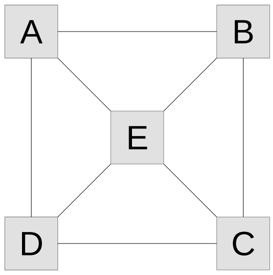
Rudolf fährt gern Rad und ist gerade dabei, eine Rundreise zu planen. Er wohnt im Ort A und möchte die Orte B, C, D genau einmal durchfahren und dann wieder zurück in seinen Heimatort radeln. Die Orte A, B, C und D sind durch Radwege wie in Abbildung A 550513 a miteinander verbunden.

Eine mögliche Route wäre A – B – D – C – A.

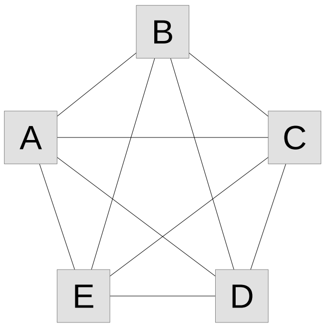
a) Gib alle möglichen Rundreisen in dieser Schreibweise an.
b) Welche Rundreisen sind ausgehend von A möglich, wenn noch ein Ort E hinzukommt und die einzelnen Orte in der Art, wie in Abbildung A 550513 b dargestellt, durch Radwege miteinander verbunden sind? Gib wieder alle möglichen Rundreisen an.
c) Die Orte A, B, C, D und E sollen nun wie in Abbildung A 550513 c dargestellt ein Fünfeck bilden. Alle Orte sind wieder durch Radwege miteinander verbunden. Wie viele Rundreisen sind nunmehr möglich?



A 550513 a



A 550513 b

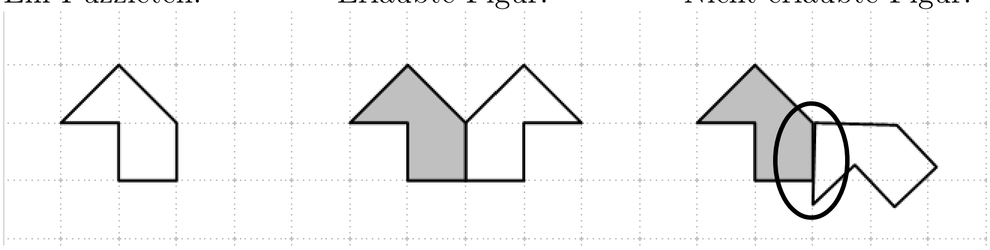


A 550513 c

550514

Zwei gleiche Puzzleteile haben die abgebildete Form. Die beiden Teile sollen aneinandergelegt werden, und zwar so, dass sie mindestens eine Seite gemeinsam haben. Die Puzzleteile dürfen dafür gedreht und gewendet werden. In keinem Fall dürfen unterschiedlich lange Seiten aneinandergelegt werden. Die Abbildung zeigt ein Puzzleteil, eine erlaubte und eine nicht erlaubte Figur.

Ein Puzzleteil: Erlaubte Figur: Nicht erlaubte Figur:



Die beiden Puzzleteile dürfen auch mit mehr als einer Seite aneinanderliegen; aber auch dann nur mit vollständigen Seiten. Zwei Figuren heißen gleich, wenn sie nach einer Drehung oder Spiegelung oder beidem genau aufeinanderpassen.

Zeichne mindestens 10 weitere voneinander verschiedene Figuren, die man aus den beiden Puzzleteilen legen kann. Nutze dabei die Kästchen eines karierten Blattes; die beiden Puzzleteile sollen erkennbar eingezeichnet werden.

55. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

550611

Es sollen Zahlenfolgen nach folgender Anleitung gebildet werden:

Wähle eine natürliche Zahl als Startzahl.

(1) Wenn die Zahl gerade ist, teile sie durch 2.
Wenn die Zahl ungerade ist, multipliziere sie mit 3 und addiere 1.

(2) Wenn die Zahl 1 erreicht ist, höre auf, anderenfalls gehe zum Schritt (1) zurück.

Ein Beispiel für die Zahlenfolge mit der Startzahl 7 ist:

7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1

a) Bilde für die Startzahlen 6, 9, 15 und 256 die entsprechenden Zahlenfolgen.

b) Welche Zahlen können in solchen Folgen unmittelbar vor einer 16 stehen?
Welche Zahlen können unmittelbar vor einer 32 stehen, welche vor einer 64?
Wie viele Glieder hat eine Folge, deren Startzahl 2^n ist?
Begründe.

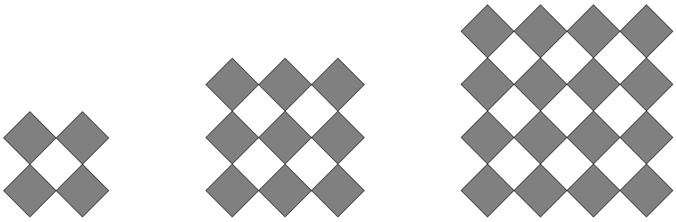
c) Gibt es eine Startzahl, deren Folge zwar auf der 1 endet, aber nicht über . . . 8, 4, 2, 1 führt?

Hinweis: Wenn du noch Lust und Geduld hast, beginne mit der Anfangszahl 27. Auch hier wirst du mit der 1 enden, allerdings nach vielen Schritten, und du wirst unterwegs unerwartet hohe Zwischenzahlen erreichen. Wie viele Glieder hat diese Folge, und wie lautet ihre größte Zahl?

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

550612

Betrachtet werden die folgenden Muster aus kleinen schwarzen und weißen Quadraten.



Stufe 1 Stufe 2 Stufe 3

A 550612

a) Ermittle jeweils für die Stufen 1, 2 und 3 (siehe Abbildung A 550612) die Differenz aus der Anzahl der schwarzen und der weißen Quadrate.
   Dieses Muster wird fortgesetzt. Wie groß ist die Differenz aus der Anzahl schwarzer und weißer Quadrate bei den Stufen 4, 5 und 6?
   Vergleiche die ermittelten Differenzen und stelle eine Vermutung dazu auf, wie sich diese Differenzen von Stufe zu Stufe verändern.
b) Die Differenz aus der Anzahl schwarzer und weißer Quadrate soll 2015 betragen. Für welche Stufe ist dies der Fall?
c) Jetzt hat man insgesamt 2015 Quadrate. Wie viele muss man davon schwarz und wie viele weiß färben, damit ein vollständiges Muster gelegt werden kann und möglichst wenige Quadrate übrig bleiben?

550613

Ramon und Stefan treffen sich zum Murmelspielen.

Ramon hat 146 Murmeln und Stefan hat 88.

a) Wie viele Murmeln müsste Ramon Stefan abgeben, dass beide gleich viele Murmeln haben?
b) Ihr Freund Tobias möchte nun auch mitspielen, hat aber keine Murmeln. Wie viele Murmeln erhält er von Ramon und wie viele von Stefan, wenn alle drei Jungen gleich viele Murmeln haben sollen?

Beim Austeilen stellt sich heraus, dass die Murmeln drei verschiedene Farben haben und es von jeder Farbe die gleiche Anzahl von Murmeln gibt.

Ramon stellt fest: „Drei Dreizehntel meiner Murmeln sind rot und es sind gleich viele blaue und gelbe.“

Stefan stellt fest: „Ich habe genauso viele blaue Murmeln, wie Ramon rote hat. Außerdem habe ich doppelt so viele rote wie blaue Murmeln.“

c) Wie viele Murmeln hat jeder der drei Jungen von jeder der drei Farben?
   Führe eine Probe durch.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

550614

Lisa hat 3 rote, 3 blaue und 3 gelbe gleich große quadratische Spielsteine. Aus diesen Spielsteinen legt Lisa Rechtecke.

Dabei gilt: Anordnungen, die nach einer Drehung übereinstimmen, gelten als gleich. Beispielsweise sind die 3×1-Rechtecke „rot-gelb-blau“ (rgb) und „blau-gelb-rot“ (bgr) keine verschiedenen Anordnungen.

a) Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat Lisa, jeweils zwei der Spielsteine auszuwählen und zu einem 2×1-Rechteck zusammenzulegen?
(Die ausgewählten Spielsteine müssen nicht verschiedene Farben haben!)

b) Wie viele verschiedene Möglichkeiten hat Lisa, jeweils drei der 9 Spielsteine auszuwählen und zu einem 3×1-Rechteck zusammenzulegen? Dabei können auch wieder Spielsteine der gleichen Farbe mehrfach ausgewählt werden.

55. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklasse 7
Aufgaben

<u>Hinweis:</u> *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

<u>550711</u>

Löse die folgende Scherzaufgabe und begründe deine Antwort:

Angenommen, eineinhalb Hühner legen in eineinhalb Tagen genau eineinhalb Eier. Wie viele Eier legen dann sieben Hühner in sechs Tagen?

<u>550712</u>

Wir betrachten ein Quadrat Q_1 mit der Seitenlänge a, ein Quadrat Q_2 mit der Seitenlänge b und ein Rechteck R mit den Seitenlängen a und b.

a) Wir untersuchen zuerst den Spezialfall $a = 7\,\text{cm}$, $b = 4\,\text{cm}$.
   Zeichne die Vierecke Q_1, Q_2 und R.
   Begründe: Man kann das Quadrat Q_1 so in rechteckige Teilflächen zerlegen, dass man aus diesen Teilflächen und dem Quadrat Q_2 zweimal das Rechteck R und ein neues Quadrat Q_3 zusammenfügen kann.
   Ermittle den Flächeninhalt des Quadrats Q_3.

b) Beweise nun für beliebige Seitenlängen a und b: Die Summe der Flächeninhalte von Q_1 und Q_2 ist stets größer oder gleich dem Doppelten des Flächeninhalts von R.

<u>550713</u>

Eva und Laura vereinbaren das folgende Spiel: Eva nimmt gleichartige Bindfäden gleicher Länge derart in eine Hand, dass von jedem Bindfaden an jeder Seite ihrer Faust genau ein Ende herausragt. Laura verknüpft zunächst auf einer Seite der Faust jedes Bindfadenende mit genau einem anderen Bindfadenende auf dieser Seite der Faust und verknüpft anschließend auf der anderen Seite der Faust jedes Bindfadenende mit genau einem anderen Bindfadenende auf jener Seite der Faust. Stellt sich beim Öffnen der Hand heraus, dass die Bindfäden einen einzigen „Ring“ bilden, so hat Laura das Spiel gewonnen. Anderenfalls hat Eva gewonnen.

a) Untersuche, welches Mädchen bei diesem Spiel die größeren Gewinnchancen hat, wenn Eva 4 Bindfäden nimmt.

b) (Zusatzaufgabe für besonders Interessierte) Untersuche, welches Mädchen bei diesem Spiel die größeren Gewinnchancen hat, wenn Eva 6 Bindfäden nimmt.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

550714

Für rationale Zahlen x betrachten wir die Ungleichung

$$x + \frac{1}{x} \geq 2 \,. \tag{1}$$

a) Zeige, dass die Ungleichung (1) für $x = \frac{4}{3}$, $x = \frac{8}{5}$ und $x = \frac{11}{10}$ gilt.

b) Begründe, warum die Ungleichung (1) für keine nichtpositive Zahl x gilt.

Die Ungleichung (1) gilt für eine positive Zahl x genau dann, wenn die Ungleichung

$$x^2 + 1 \geq 2x \tag{2}$$

für diese positive Zahl x gilt, da die Ungleichung (2) aus der Ungleichung (1) durch Multiplikation mit x entsteht. Um zu beweisen, dass die Ungleichung (1) für jede positive Zahl x gilt, genügt es daher zu beweisen, dass die Ungleichung (2) für jede positive Zahl x gilt.

c) Beweise, dass die Ungleichung (2) für jede positive Zahl x gilt, indem du die Erkenntnisse der Aufgabe 550712 nutzt.

d) Beweise, dass die Ungleichung (2) für jede positive Zahl x gilt, indem du begründest, dass die Ungleichung $(x-1)^2 \geq 0$ für jede positive Zahl x gilt, und aus dieser Ungleichung die Ungleichung (2) herleitest.

Zusatzaufgaben für besonders Interessierte:

e) Begründe, dass die Ungleichung $x - 1 \geq \frac{x-1}{x}$ für $x \geq 1$ gilt.
Leite aus dieser Ungleichung die Ungleichung (1) zunächst für alle Zahlen x mit $x \geq 1$ her und folgere hieraus die Gültigkeit der Ungleichung (1) für x mit $0 < x < 1$.

f) Untersuche, für welche positiven Zahlen x in der Ungleichung (1) Gleichheit eintritt.

55. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

550811

Mathematicus stellt seine Zinnsoldaten zu einer Parade auf. Wenn die Zinnsoldaten in Zweierreihen stehen, bleibt ein Soldat übrig. Beim Aufstellen in Dreierreihen bleiben 2 Soldaten, beim Aufstellen in Viererreihen bleiben 3 Soldaten übrig. Erst die Anordnung in Fünferreihen ergibt eine Parade aller vorhandenen Soldaten.

Bestimme die Anzahl der Zinnsoldaten, die Mathematicus mindestens besitzt.

550812

Herr Meyer hatte sich verpflichtet, ein Darlehen in vier Raten zu tilgen. Vereinbarungsgemäß zahlte er zum ersten Termin den vierten Teil seiner Schuld und noch 50 Euro. Beim zweiten Termin tilgte er von der Restschuld den fünften Teil und noch 60 Euro. Beim dritten Termin bezahlte Herr Meyer von der nun verbliebenen Restschuld die Hälfte und noch 50 Euro. Mit dem vierten Termin konnte er durch den Restbetrag von 200 Euro seine Schulden vollständig begleichen.

Berechne das ursprüngliche Darlehen von Herrn Meyer.

Bemerkung: Bei der Tilgung dieses Darlehens fielen keinerlei zusätzliche Kosten an.

550813

Lehrer Pfiffig gibt den Freunden Anton, Bernd, Claus, Daniel und Eugen jeweils mindestens eine Münze und teilt ihnen mit: Anton hat weniger Münzen als Bernd bekommen, Bernd weniger Münzen als Claus, Claus weniger Münzen als Daniel und Daniel hat weniger Münzen als Eugen bekommen. Schließlich nennt Lehrer Pfiffig den Freunden die Gesamtanzahl n der Münzen.

Ermittle die kleinste Zahl n, zu der es eine Verteilung gibt, bei der keiner der Freunde aus diesen Angaben eindeutig herausfinden kann, wie viele Münzen die einzelnen Freunde erhalten haben.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

550814

Ein Kreis k hat den Mittelpunkt M und die Radiuslänge r. Der Punkt A ist ein Punkt außerhalb des Kreises. Von A sollen die Tangenten an k gelegt werden. Man führt dazu die folgende Konstruktion durch:

(K1) Zeichne den Kreis k_1 um M mit der Radiuslänge $2r$.

(K2) Zeichne den Kreis k_2 um A mit der Radiuslänge $|AM|$. Benenne die Schnittpunkte der Kreise k_1 und k_2 mit P und Q.

(K3) Konstruiere die Mittelsenkrechten m_{MP} und m_{MQ} der Strecken $\overline{MP}$ und $\overline{MQ}$.

Die Geraden m_{MP} und m_{MQ} sind dann die beiden gesuchten Tangenten.

a) Beweise, dass die so konstruierten Geraden m_{MP} und m_{MQ} tatsächlich die durch A verlaufenden Tangenten an den Kreis k sind.

b) Untersuche, ob diese Konstruktion stets durchführbar ist.

c) Führe die Konstruktion für die Radiuslänge $r = 3\,\text{cm}$ und die Streckenlänge $|AM| = 7\,\text{cm}$ durch.

d) Informiere dich, ob es weitere Konstruktionsmöglichkeiten gibt. Führe eine dieser Konstruktionen durch und beschreibe sie.

55. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklassen 9 und 10
Aufgaben

Hinweise: 1. *Für die Jahrgangsstufen 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

551011

a) Weisen Sie nach, dass es eine natürliche Zahl $a > 1$ gibt, für die der Term

$$82 \cdot \left(a^8 - a^4\right)$$

durch das Produkt von drei aufeinanderfolgenden und mindestens zweistelligen natürlichen Zahlen teilbar ist.

b) Bestimmen Sie die kleinste mindestens zweistellige Primzahl a, für die

$$82 \cdot \left(a^8 - a^4\right)$$

durch das Produkt von drei aufeinanderfolgenden und mindestens zweistelligen natürlichen Zahlen teilbar ist.

c) Der obige Term wird jetzt durch $82 \cdot (a^8 - a^2)$ ersetzt.
Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl $a > 1$, für die dieser Term durch das Produkt von drei aufeinanderfolgenden und mindestens zweistelligen natürlichen Zahlen teilbar ist.

551012

Beweisen Sie: Wenn in einem Dreieck ABC die Beziehung $|\sphericalangle ACB| = 3 \cdot |\sphericalangle BAC|$ gilt, dann lässt sich dieses Dreieck in zwei nicht kongruente gleichschenklige Teildreiecke zerlegen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

551013

In einem rechtwinkligen (x, y)-Koordinatensystem sind die Punkte $A(0,0)$, $B(b,0)$, $C(b,c)$ und $D(0,d)$ mit positiven reellen Zahlen b, c, d gegeben. Es sei E der Schnittpunkt der Geraden AC und BD. Mit F wird der Fußpunkt des Lotes von E auf die Gerade AB bezeichnet.

a) Bestimmen Sie für $b = 5$, $c = 3$ und $d = 6$ die Länge der Strecke $\overline{EF}$.

b) Wählt man aus den Punkten A, B, C, D, E und F jeweils drei Punkte aus, die nicht auf einer Geraden liegen, so erhält man ein Dreieck. Nennen Sie drei verschiedene Paare ähnlicher Dreiecke, die man auf diese Weise erhalten kann.

c) Zeigen Sie allgemein für beliebige positive reelle Werte von b, c und d, dass stets

$$|EF| = \frac{c \cdot d}{c + d}$$

gilt.

551014

a) Es sei $p(x) = a\,x^2 + b\,x + (a + b)$.
Weisen Sie nach, dass für $a = 2{,}5$ und $b = 0{,}5$ die Funktionswerte $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$ und $p(11)$ jeweils ganzzahlig sind.

b) Es sei $p(x) = a\,x^2 + b\,x + (a + b)$ mit rationalen Koeffizienten a und b. Ferner seien $p(0)$ und $p(-1)$ ganze Zahlen.
Zeigen Sie, dass $p(x)$ für jede ganze Zahl x ganzzahlig ist.

551015

Gegeben sind ein quaderförmiges Aquarium mit den folgenden Innenmaßen

Länge = 114 cm, Breite = 41 cm und Höhe = 100 cm

und weiterhin drei gleich große Eisenwürfel der Kantenlänge 40 cm.

In das Aquarium werden $180\,000\,\mathrm{cm}^3$ (= 180 Liter) Wasser gefüllt. Kann man die Eisenwürfel so in das Aquarium legen, dass alle drei unter Wasser liegen?

551016

a) Jeder Punkt einer Ebene sei rot oder blau gefärbt. (Oder exakter formuliert: Jedem Punkt der Ebene wird entweder die Farbe Rot oder die Farbe Blau zugeordnet.)
Zeigen Sie, dass es in dieser Ebene stets zwei Punkte mit dem Abstand 1 gibt, die die gleiche Farbe haben.

b) Jeder Punkt einer Ebene sei in einer der drei Farben Rot, Gelb oder Blau gefärbt.
Zeigen Sie, dass es auch in dieser Ebene stets zwei Punkte mit dem Abstand 1 gibt, die die gleiche Farbe haben.

Bemerkung: Stellen Sie sich beispielsweise vor, dass aus farbigem Papier mikroskopisch kleines Konfetti ausgestanzt wird und dieses Konfetti so dicht auf einem Tisch ausgestreut wird, dass die Tischdecke vollständig mit farbigen Konfettistückchen überdeckt ist.

55. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Olympiadeklassen 11 und 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

551211

Gegeben ist das Gleichungssystem

$$2\,(z-1)-x=55\,, \tag{1}$$
$$4xy-8z=12\,, \tag{2}$$
$$a\,(y+z)=11\,. \tag{3}$$

Man bestimme die beiden größten reellen Werte für a, zu denen es positive ganze Zahlen x, y, z gibt, die das Gleichungssystem lösen.

Zu jeder dieser Lösungen bestimme man das Produkt xyz.

551212

Im alten Ägypten wurden Längen in der Einheit Königselle (*meh-nesut,* etwa 0,524 m) gemessen. Ein ägyptischer Pharao möchte eine gerade quadratische Pyramide bauen lassen, bei der die Längen von Höhe, Grundkante und Seitenkante ganzzahlige Vielfache von 10 Königsellen sein sollen. Außerdem verlangt er, dass die Faktoren, mit denen die Vielfachen gebildet werden, drei aufeinanderfolgende Zahlen sind.

Man stelle fest, ob dies möglich ist. Sollte es der Fall sein, dann ermittle man für alle derartigen Pyramiden jeweils die Längen von Höhe, Grundkante und Seitenkante.

Hinweis: Es ist nicht gefordert, dass unbedingt die Höhe die kleinste und die Seitenkante die größte Länge hat.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

551213

Man bestimme alle Paare (a, b) positiver ganzer Zahlen, für die $(a+1)(b+1)$ durch ab teilbar ist.

551214

In einem Dreieck seien a und b die Längen der beiden kürzesten Seiten. Weiterhin mögen r und R den Inkreisradius beziehungsweise den Umkreisradius dieses Dreiecks bezeichnen. Man beweise die Ungleichung

$$ab > 4rR\,.$$